Universidade Federal de Sergipe
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Uma aplicação de produto alternado em $\mathbb{R}^3$ usando vetores

por

Edson Henrique dos Santos
Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: **Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo**

Agosto de 2017

Universidade Federal de Sergipe
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Edson Henrique dos Santos

Uma aplicação de produto alternado em $\mathbb{R}^3$ usando vetores

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo**

Agosto de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Uma aplicação de produto alternado em R^3 usando vetores

por

Edson Henrique dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo - UFS
Orientador

Zaqueu Alves Ramos

Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador

Rainelly Cunha de Medeiros

Prof.ª Dr.ª Rainelly Cunha de Medeiros - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de Agosto de 2017

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Agradeço à Deus, por me dar força de continuar lutando para alcançar meus objetivos, a meus colegas de mestrado por me incentivarem e me ajudarem nos momentos difíceis que passei durante o curso.

À minha família, pelo incentivo, por não me fazer desistir e pela educação que me deram para me tornar o homem que sou hoje.

Aos professores do PROFMAT em São Cristovão - SE, em especial meu orientador Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo, pelo apoio e ensinamentos adquiridos no decorrer do curso, por me motivarem a seguir sempre em frente em busca do sucesso.

Aos colegas professores das escolas em que eu trabalho, pelo apoio.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos vetores desde a sua relação com um segmento orientado, suas principais operações, combinação linear, dependência linear e base, até a parte de produto alternado. Relacionamos o produto alternado de dois vetores com área do paralelogramo formado por eles, assim como, o produto alternado de três vetores com o volume do paralelepípedo. Mostramos ainda que o produto vetorial e o produto misto são casos especiais de produto alternado.

Palavras-chaves: Vetores. Produto Alternado. Área. Paralelogramo. Volume. Paralelepípedo.

Abstract

In this work, we will present vectors from its relation with a oriented segment, its main operations, linear combination, linear dependence and base, up to the alternating product part. We relate the alternating product of two vectors with the area of the parallelogram formed by them, as well as the alternating product of three vectors with the volume of the parallelepiped. We also show that the vector product and the mixed product are special cases of alternating product.

Keywords: Vectors. Alternate Product. Area. Parallelogram. Volume. Parallelepiped.

Sumário

Introdução

O produto vetorial e o produto misto normalmente são vistos nos livros didáticos através de uma definição artificial do seu objeto. Isso muitas vezes confunde os estudantes de matemática, por achar que esse conceito foi criado do nada.

Este trabalho buscará trazer o conceito de produto vetorial e produto misto naturalmente através da definição de produto alternado. Nele mostraremos que o produto vetorial e o produto misto são casos particulares de produto alternado. Além disso, apresentaremos uma aplicação de cada caso no $\mathbb{R}^3$ usando vetores.

O presente trabalho será apresentado em dois capítulos, o primeiro destinado a vetores e o segundo a uma aplicação de produto alternado a vetores para o cálculo de áreas e volumes de paralelogramo e paralelepípedo, respectivamente.

O primeiro capítulo é dividido em 3 seções.

Na primeira seção apresentaremos uma abordagem intuitiva de segmento orientado e a partir disso definiremos os conceitos de vetor e de módulo de vetor.

Na segunda seção definiremos as principais operações com vetores: adição, o produto de um número real por um vetor, o produto escalar, o produto vetorial e o produto misto entre vetores. Definiremos também o ângulo formado entre dois e provaremos propriedades das operações.

Na terceira seção definiremos combinação linear, dependência linear e base. Abordaremos vetores linearmente dependentes e linearmente independentes e provaremos alguns fatos sobre vetores e sua relação com a dependência linear.

O segundo capítulo é dividido em duas seções.

Na primeira seção abordaremos o produto alternado de ordem 2 em $\mathbb{R}^3$ e mostraremos que o produto vetorial é um caso particular de produto alternado. Demonstraremos que o módulo do produto alternado é igual a área do paralelogramo formado.

Na segunda seção, abordaremos o produto alternado de ordem 3 em $\mathbb{R}^3$ e mostraremos que o produto misto é um caso particular de produto alternado. Demostraremos que o módulo do produto alternado é igual ao volume do paralelepipedo formado.

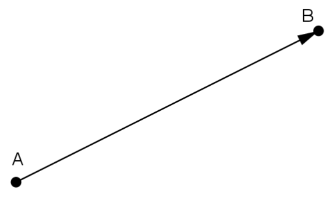
Capítulo 1

Noção de vetor

1.1 O que é vetor?

Antes de darmos uma definição formal de vetores é necessário uma abordagem intuitiva dos conceito de segmento orientado e também de segmentos equipolentes. Este capitulo traz em si operações básicas utilizando vetores que serão necessários para um aprofundamento no assunto.

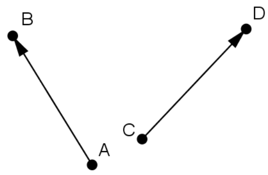
Definição 1.1.1 Sejam A e B dois pontos quaisquer, o segmento de reta de origem A e extremidade B, representado abaixo,através de uma flecha, é chamado de *segmento orientado AB*.



É bom ficar claro que o segmento AB é diferente do segmento BA pois AB tem sentido de A para B, e BA tem sentido de B para A. Neste caso, o sentido é importante, pois, os segmentos são orientados. Note que a direção de AB e a direção de BA é a mesma. A direção esta definida pela reta suporte que contém os pontos A e B, reta AB ou reta BA. Neste contexto, a direção é irrelevante visto que AB e BA tem a mesma direção da reta suporte que contém o segmento AB ou BA.

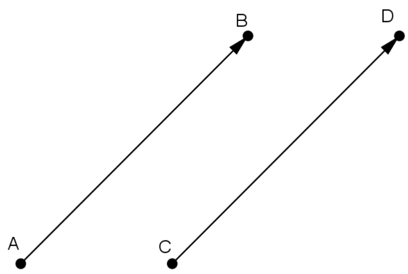
Observação 1.1.1 *Um segmento orientado em que os pontos A e B coincidem , ou seja, $A = B$ é chamado de segmento orientado nulo.*

Definição 1.1.2 Sejam AB e CD dois segmentos orientados quaisquer, dizemos que eles são de *mesmo tamanho* se a medida do segmento AB for geometricamente igual a medida do segmento CD.



Observação 1.1.2 *Denota-se o comprimento de um segmento orientado AB por* $\| AB \|$.

Definição 1.1.3 Dois segmentos orientados quaisquer AB e CD são ditos *equipolentes,* o que denotaremos por $AB \sim CD$ (lê-se AB é equipolente a CD),se forem nulos ou se tiverem a mesma direção,o mesmo comprimento e o mesmo sentido.



A relação de equipolência é uma relação de equivalência pois são validas as seguintes propriedades:

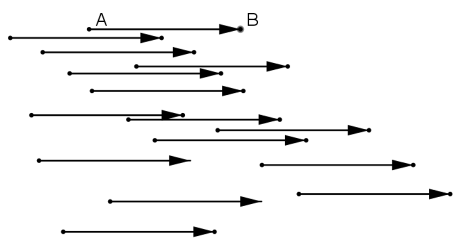
a) $AB \sim AB$ (reflexiva)

b) Se $AB \sim CD$ então $CD \sim AB$ (simétrica)

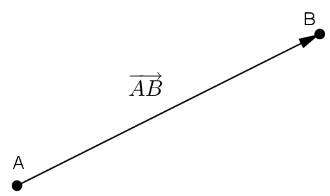
c) Se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$ então $AB \sim EF$ (transitiva)

Observação 1.1.3 *As propriedades descritas acima não requerem uma demonstração formal, pois, decorrem diretamente da definição de segmento de reta.*

Definição 1.1.4 Dado um segmento orientado AB chamamos de *classe de equipolência* de AB ao conjunto formado por todos os segmentos orientados equipolentes a AB. Dizemos então que o segmento orientado AB é um representante da classe.



Definição 1.1.5 Um *vetor* é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se AB é um segmento orientado qualquer o vetor que tem AB como representante será indicado por $\overrightarrow{AB}$.



No plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ está definida a operação $B - A$ para quaisquer par de pontos. Dessa forma $B - A$ é o único representante do vetor $\overrightarrow{AB}$ na origem. Esse mesmo fato ocorre quando utilizamos o $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.1.1 *Dados os pontos* $A(2,4)$ *e* $B(5,9)$ *o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é dado por:*

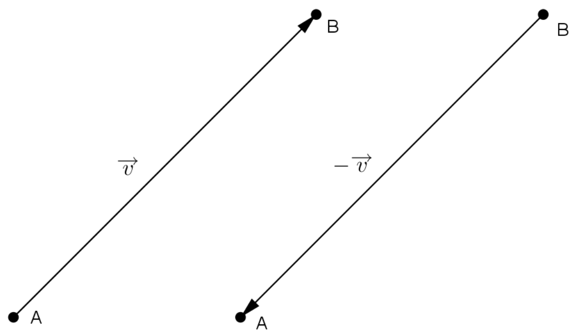
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,9) - (2,4) = (5-2\ ,\ 9-4) = (3,5).$$

Algumas vezes não queremos destacar nenhum representante especial de um vetor, neste caso usamos letras latinas minusculas com uma seta acima para representa-los ($\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$).

Observação 1.1.4 *Deve ficar claro que se, por exemplo, AB e CD são segmentos equipolentes então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais para quaisquer pontos A, B , C e D nessas condições.*

Definição 1.1.6 *Vetor nulo,*denotado por $\overrightarrow{0}$, é o vetor que é formado por um segmento orientado nulo. Em outras palavras, dado o ponto A qualquer, o vetor $\overrightarrow{AA}$ é igual ao vetor nulo $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Definição 1.1.7 Seja $\overrightarrow{AB}$ um representante de um vetor $\overrightarrow{v}$ qualquer, o *vetor oposto* de $\overrightarrow{v}$, denotado por $-\overrightarrow{v}$, é o vetor que tem $\overrightarrow{BA}$ como representante.



Definição 1.1.8 Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não nulos:

- Dizemos que eles são *paralelos* se um representante de $\overrightarrow{u}$ é paralelo a um representante de $\overrightarrow{v}$, ou seja, se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$ e indicamos por $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$;

- Dizemos que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são *de mesmo sentido* se um representante de $\overrightarrow{u}$ e um de $\overrightarrow{v}$ são de mesmo sentido;

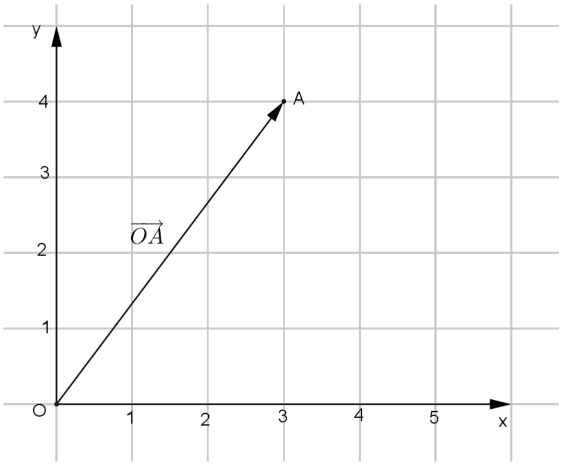
- Dizemos que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são de *sentido contrário* se um representante de $\overrightarrow{u}$ e um de $\overrightarrow{v}$ são de sentido contrário.

Observação 1.1.5 *O vetor nulo é paralelo a qualquer vetor.*

1.1.1 Módulo de um vetor

Definição 1.1.9 O *módulo* ou *norma* de um vetor é o comprimento de qualquer de seus representantes. A norma de um vetor $\overrightarrow{u}$ qualquer é denotada por $\| \overrightarrow{u} \|$.

Exemplo 1.1.2 *Dado o vetor* $\overrightarrow{OA} = (3, 4)$ *então podemos calcular o seu módulo determinando a distancia da sua origem* O *a extremidade* A.



Pelo teorema de Pitagoras , temos que: $\| \overrightarrow{OA} \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Observação 1.1.6 *Se um vetor possui norma igual a 1 dizemos que ele é um vetor unitário.*

Definição 1.1.10 Seja $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2)$ um vetor qualquer pertencente ao $\mathbb{R}^2$ o *módulo* ou *norma* de $\overrightarrow{u}$ denotado por $\| \overrightarrow{u} \|$ é dado por:

$$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

.

Definição 1.1.11 Seja $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, x_3)$ um vetor qualquer pertencente ao $\mathbb{R}^3$ o *módulo* ou *norma* de $\overrightarrow{u}$ denotado por $\| \overrightarrow{u} \|$ é dado por:

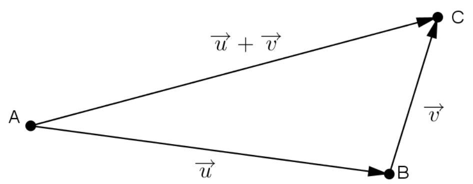
$$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

1.2 Operações com vetores

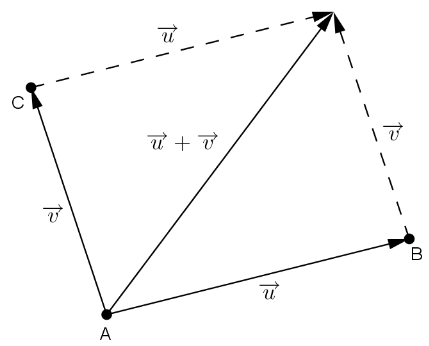
Veremos a seguir as principais operações envolvendo vetores.

1.2.1 Adição de vetores

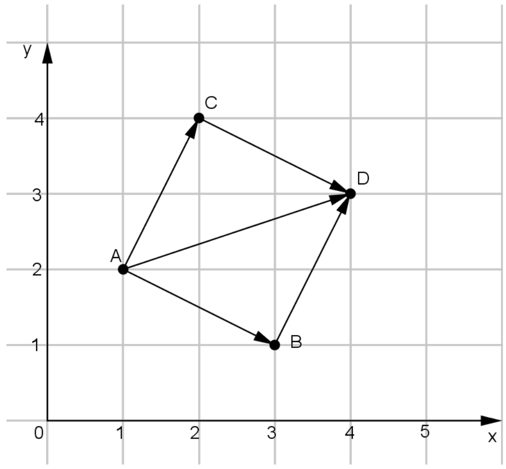
Definição 1.2.1 Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores quaisquer tais que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, o *vetor soma* de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ denotado por $\vec{u} + \vec{v}$ é tal que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ conforme figura abaixo:



Observação 1.2.1 *Podemos usar a regra do paralelogramo para calcularmos a soma de vetores. A regra consiste em formar um paralelogramo usando dois vetores não paralelos tomando os vetores em uma mesma origem e formando o paralelogramo usando a origem e extremidades adequadas para que o vetor soma seja a diagonal do paralelogramo, conforme a figura abaixo.*



Exemplo 1.2.1 *Seja* $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -1)$ *e* $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 2)$, *determine* $\vec{u} + \vec{v}$.



Solução $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (2, -1) + (1, 2) = (2 + 1\ ,\ -1 + 2) = (3, 1)$.

Note que $\overrightarrow{AD} = D - A = (4, 3) - (1, 2) = (3, 1)$,ou seja, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Proposição 1.2.1 *Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores quaisquer. São válidas as seguintes propriedades:*

A_1 : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})+\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ *(associativa)*

A_2 : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ *(comutativa)*

A_3 : $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ *(elemento neutro), ou seja, existe um único vetor que somado com $\overrightarrow{v}$ da o próprio vetor $\overrightarrow{v}$, esse vetor é chamado de vetor nulo.*

A_4 : $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ *(elemento oposto)*

Demonstração Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD}$ então temos:

A$_1$: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ (I)

$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (II)

De (I) e (II) temos que $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})+\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.

A$_2$: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (I)

$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = C - B + B - A = C - A = \overrightarrow{AC}$ (II)

De (I) e (II) temos que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

A$_3$: $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA} = C - B + A - A = A - A + C - B = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA} = C - B + A - A = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.

$A_4: \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{BC} + (-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$

□

1.2.2 Produto de um número real por um vetor

Definição 1.2.2 A *multiplicação de um número real por um vetor* é aquela a qual associa a cada par $(\alpha, \overrightarrow{u})$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{u}$ um vetor qualquer, ao vetor $\alpha\overrightarrow{u}$ tal que:

- *Se* $\alpha = 0$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, *então* $\alpha\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- *Se* $\alpha \neq 0$ *e* $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ *então* $\alpha\overrightarrow{u}$ *é tal que:*

  a) $\alpha\overrightarrow{u}$ *é paralelo a* $\overrightarrow{u}$

  b) $\alpha\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{u}$ *são de mesmo sentido se* α *for positivo e são de sentido contrario caso* α *seja negativo;*

  c) $\| \alpha\overrightarrow{u} \| = | \alpha | \| \overrightarrow{u} \|$

Exemplo 1.2.2 *Sejam* $\alpha = 5 \in \mathbb{R}$ *e* $\overrightarrow{u} = (1, 3)$ *um vetor. Determine o vetor* $\alpha \cdot \overrightarrow{u}$.
Solução $\alpha \cdot \overrightarrow{u} = 5 \cdot (1, 3) = (5 \cdot 1,\ 5 \cdot 3) = (5, 15)$.

A seguir, apresentaremos as propriedades básicas da multiplicação de escalar por vetor.

Proposição 1.2.2 *Sejam* α_1 *e* α_2 *números reais e sejam* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *vetores quaisquer são válidas as seguintes propriedades:*

$M_1: \alpha_1(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_1\overrightarrow{v}$

$M_2: (\alpha_1 + \alpha_2)\overrightarrow{u} = \alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{u}$

$M_3: 1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

$M_4: \alpha_1(\alpha_2\overrightarrow{u}) = (\alpha_1\alpha_2)\overrightarrow{u} = \alpha_2(\alpha_1\overrightarrow{u})$

Demonstração Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ vetores do $\mathbb{R}^2$ então:

$\mathrm{M}_1:\ \alpha_1(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \alpha_1((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = \alpha_1(x_1+x_2,y_1+y_2) = (\alpha_1(x_1+x_2),(\alpha_1(y_1+y_2)) = (\alpha_1x_1+\alpha_1x_2,\alpha_1y_1+\alpha_1y_2) = (\alpha_1x_1,\alpha_1y_1)+(\alpha_1x_{,}\alpha_1x_{2,1}y_2) = \alpha_1(x_1,y_1)+\alpha_1(x_2,y_2) = \alpha_1\overrightarrow{u}+\alpha_1\overrightarrow{v}.$

$\mathrm{M}_2:\ (\alpha_1+\alpha_2)\overrightarrow{u} = (\alpha_1+\alpha_2)(x_1,y_1) = ((\alpha_1+\alpha_2)x_1,(\alpha_1+\alpha_2)y_1) = (\alpha_1x_1+\alpha_2x_1,\alpha_1y_1+\alpha_2y_1) = (\alpha_1x_1,\alpha_1y_1)+(\alpha_2x_1,\alpha_2y_1) = \alpha_1(x_1,y_1)+\alpha_2(x_1,y_1) = \alpha_1\overrightarrow{u}+\alpha_2\overrightarrow{u}.$

$\mathrm{M}_3:\ 1\overrightarrow{u} = 1(x_1,x_2) = (1\cdot x_1, 1\cdot x_2) = (x_1,x_2) = \overrightarrow{u}.$

$\mathrm{M}_4:\ \alpha_1(\alpha_2\overrightarrow{u}) = \alpha_1(\alpha_2(x_1,y_1)) = \alpha_1(\alpha_2x_1,\alpha_2y_1) = (\alpha_1\alpha_2x_1,\alpha_1\alpha_2y_2) = \alpha_2(\alpha_1x_1,\alpha_1y_1) = \alpha_2(\alpha_1(x_1,y_1)) = \alpha_1(\alpha_2\overrightarrow{u}).$

$\square$

Observação 1.2.2 *Omitiremos a prova para vetores no* $\mathbb{R}^3$*, pois, é análoga ao* $\mathbb{R}^2$

Proposição 1.2.3 *Se* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *não são paralelos, então* $\alpha_1\overrightarrow{u}+\alpha_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$

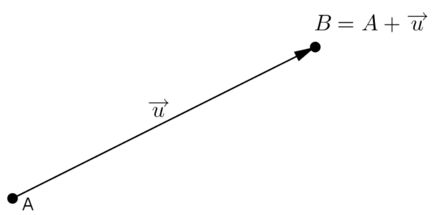
Demonstração *Se* α_1 *fosse não-nulo teriamos da igualdade* $\alpha_1\overrightarrow{u}+\alpha_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *que* $\overrightarrow{u} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{v}$ *que seria uma contradição, ja que por hipótese* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *não são paralelos. Portanto* $\alpha_1=0$*. De forma análoga pode-se provar que* $\alpha_2=0$*.*

$\square$

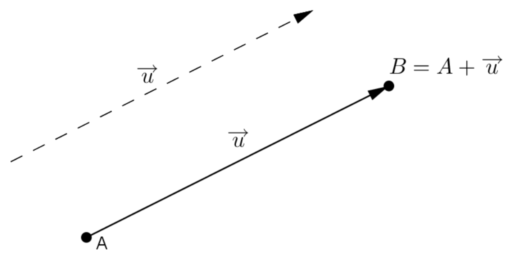
Observação 1.2.3 *A noção algébrica à proposição acima é chamada independência linear e será estudada mais adiante.*

1.2.3 Soma de um ponto com um vetor

Definição 1.2.3 Dados um ponto A e um vetor $\overrightarrow{u}$, o ponto B tal que o segmento orientado AB é representante de $\overrightarrow{u}$ é chamado *soma de A com* $\overrightarrow{u}$ e denotado por $A+\overrightarrow{u}$, ou seja: $A+\overrightarrow{u} = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.



Observe que a soma de um ponto a um vetor é simplesmente uma translação da origem do vetor para o ponto a partir do qual se quer somar o vetor.



1.2.4 Produto escalar

Definição 1.2.4 Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2)$ e $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2)$ vetores quaisquer em $\mathbb{R}^2$ então o *produto escalar* do vetor $\overrightarrow{u}$ pelo vetor $\overrightarrow{v}$ é dado por:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1y_1 + x_2y_2$$

Exemplo 1.2.3 *Sejam* $\overrightarrow{u} = (1, -4)$ *e* $\overrightarrow{v} = (-2, 5)$ *determine* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Solução $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (1, -4) \cdot (-2, 5) = 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 = -2 - 20 = -22$

Definição 1.2.5 Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, y_3)$ vetores quaisquer em $\mathbb{R}^3$ então o *produto escalar* do vetor $\overrightarrow{u}$ pelo vetor $\overrightarrow{v}$ é dado por:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Exemplo 1.2.4 *Sejam* $\overrightarrow{u} = (1, -4, 5)$ *e* $\overrightarrow{v} = (-2, 5, 3)$ *determine* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Solução $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (1, -4, 5) \cdot (-2, 5, 3) = 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 + 5 \cdot 3 = -2 - 20 + 15 = -7$

Observação 1.2.4 *É bom ficar claro que o resultado do produto escalar entre vetores é um numero real e não um vetor.*

Observação 1.2.5 *A noção de produto escalar, embora pareça artificial, tem relevante importância na teoria, pois relaciona-se com a norma e caracteriza ortogonalidade de vetores.*

Proposição 1.2.4 *Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ vetores e α um número real qualquer, são válidas as seguintes **propriedades**:*

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

b) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

c) $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\alpha\overrightarrow{v})$

d) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0$ *se* $\overrightarrow{u} \neq 0$.

e) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, *se* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

f) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$

Demonstração *Tomemos* $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1), \overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ *e* $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3)$ *vetores do* $\mathbb{R}^2$

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

b) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.

c) $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \alpha(x_1x_2 + y_1y_2) = \alpha x_1x_2 + \alpha y_1y_2 = (\alpha x_1, \alpha y_1) \cdot (x_2, y_2) = (\alpha(x_1, y_1)) \cdot (x_2, y_2) = (\alpha\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v}$.

$\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \alpha(x_1x_2 + y_1y_2) = \alpha x_1x_2 + \alpha y_1y_2 = x_1\alpha x_2 + y_1\alpha y_2 = (x_1, y_1) \cdot (\alpha x_2, \alpha y_2) = (x_1, y_1) \cdot (\alpha(x_2, y_2)) = \overrightarrow{u} \cdot (\alpha\overrightarrow{v})$.

d) Se $\overrightarrow{u} \neq 0$, *então* x_1 *e* y_1 *nunca são ambos nulos. Logo,* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0$.

e) Se $\overrightarrow{u} = (0,0)$ *então* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = (0,0) \cdot (0,0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$.

f) $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2)$ *então pela definição de produto escalar de vetores*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x_1x_1 + x_2x_2 = x_1^2 + x_2^2 \ (I)$$

e pela definição de norma

$$\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\Rightarrow \| \overrightarrow{u} \|^2 = x_1^2 + x_2^2 \ (II)$$

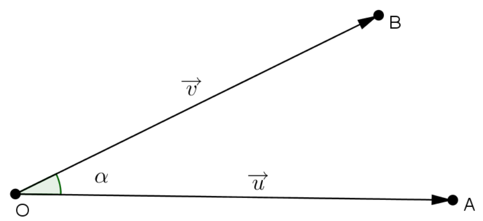
De (I) e (II) temos que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$.

$\square$

Observação 1.2.6 *Omitiremos a prova para vetores no* $\mathbb{R}^3$, *pois, é análoga ao* $\mathbb{R}^2$

1.2.5 Ângulos entre vetores

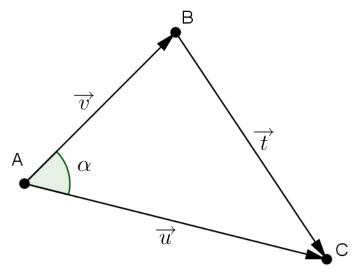
Definição 1.2.6 Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores não nulos quaisquer o ângulo α formado pelas semirretas OA e OB de mesma origem O na qual $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ é o *ângulo entre os vetores* $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, com $0 \leq \alpha \leq \pi$ conforme mostra a figura abaixo.



Proposição 1.2.5 *Sejam* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *dois vetores não nulos quaisquer, o cosseno do ângulo* α *entre os respectivos vetores é dado por:*

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \|}$$

Demonstração *Tomemos os vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *com origem em A conforme figura abaixo:*



Note que $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{t} = \overrightarrow{u}$ *pela regra do paralelogramo para adição de vetores ,ou seja,* $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. *Tomando a norma dos vetores do triângulo* ABC *podemos aplicar a lei dos cossenos.*

$\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos\alpha$ (I).

Mas $\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \| \overrightarrow{u} \|^2 - 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \| \overrightarrow{v} \|^2$ (II).

pelo item f) da ***proposição 1.2.4***. *De* (I) *e* (II) *temos:*

$\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos\alpha = \| \overrightarrow{u} \|^2 - 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \| \overrightarrow{v} \|^2$ *donde:*

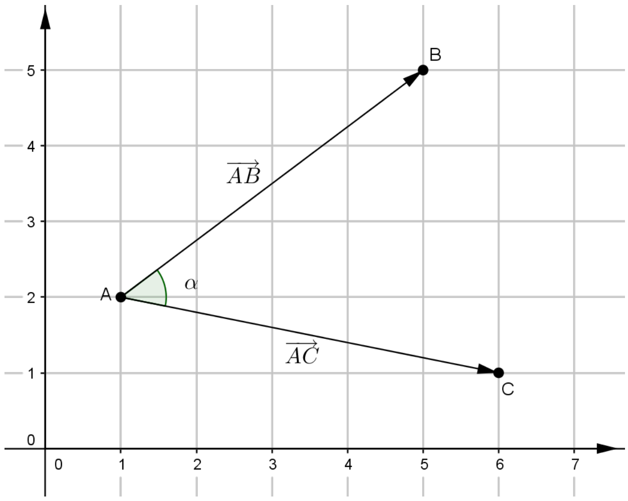
$\| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos\alpha = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

e como $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são ambos não nulos concluímos que:*

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \|}.$$

$\square$

Exemplo 1.2.5 *Sejam A(1,2), B(3,5) e C(6,1),determine o cosseno do ângulo* α *formado pelos vetores* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$.



Solução $\overrightarrow{AB} = B - A = (3,5) - (1,2) = (2,3)$ *e* $\overrightarrow{AC} = C - A = (6,1) - (1,2) = (5,-1)$. *Então temos:* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2,3) \cdot (5,-1) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) = 7$. *Pelo item f) da proposição temos* $\| \overrightarrow{AB} \|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \| \overrightarrow{AB} \|^2 = (2,3) \cdot (2,3) \Rightarrow \| \overrightarrow{AB} \|^2 = 4 + 9$ $\Rightarrow \| \overrightarrow{AB} \|^2 = 13 \Rightarrow \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{13}$. *Analogamente mostramos que* $\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{26}$. *Daí temos:* $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \|} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{338}}$.

1.2.6 Produto vetorial

Definição 1.2.7 Sejam $\overrightarrow{u} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ e $\overrightarrow{v} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$ o *produto vetorial* de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$ é dado por:

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}), a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Observação 1.2.7 *O produto vetorial de vetores é um vetor.*

1.2.7 Produto misto

Definição 1.2.8 Sejam $\overrightarrow{u} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\overrightarrow{v} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ e $\overrightarrow{w} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ três vetores do $\mathbb{R}^3$ o *produto misto* de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, nesta ordem é o número real, indicado por $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, tal que:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = a_{11}(a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Observação 1.2.8 *O produto misto diferente do vetorial tem como resultado um número real. O seu valor é obtido pelo produto escalar do produto vetorial de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$ por $\overrightarrow{w}$, ou seja, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.*

1.3 Combinação, dependência linear e base

Nesta seção veremos combinação linear, dependência linear e abordaremos os casos específicos no plano e no espaço.

1.3.1 Combinação linear

Definição 1.3.1 Sejam $(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, ..., \overrightarrow{u_n})$ uma sequência qualquer de vetores e $\overrightarrow{v}$ um vetor qualquer. Dizemos que $\overrightarrow{v}$ é *combinação linear* ou que $\overrightarrow{v}$ *é **gerado*** por $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, ..., \overrightarrow{u_n}$ se:

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$$

para $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n} \in (\overrightarrow{u})$.

Observação 1.3.1 *Nesse caso dizemos que a sequência de vetores* $(\overrightarrow{u})$ ***gera*** *o vetor* $\overrightarrow{v}$.

Exemplo 1.3.1 *O vetor* $\overrightarrow{w} = (8,3)$ *é uma combinação linear de* $\overrightarrow{u} = (2,0)$ *com o vetor* $\overrightarrow{v} = (0,1)$, *pois,* $(8,3) = 4 \cdot (2,0) + 3 \cdot (0,1)$, *ou seja,* $\overrightarrow{w} = 4\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$.

1.3.2 Dependência linear

Definição 1.3.2 Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}$ vetores quaisquer. Dizemos que eles são ***linearmente independentes(LI)*** se a igualdade:

$$\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = 0$$

admitir apenas a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Caso contrário, dizemos que os vetores são ***linearmente dependentes(LD)***,ou seja, se a igualdade:

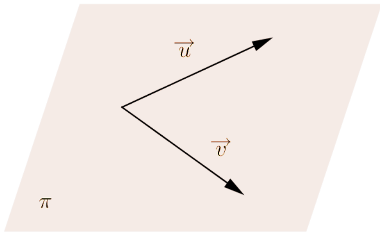
$$\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{u_n} = 0$$

admitir solução diferente da trivial, isto é, se existirem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ não todos nulos, tais que a igualdade seja válida.

Observação 1.3.2 *Note que existe uma relação geométrica interessante acerca da independência linear. A saber: um vetor L.I. gera uma reta, dois vetores L.I. geram um plano e três vetores L.I. geram um espaço.*

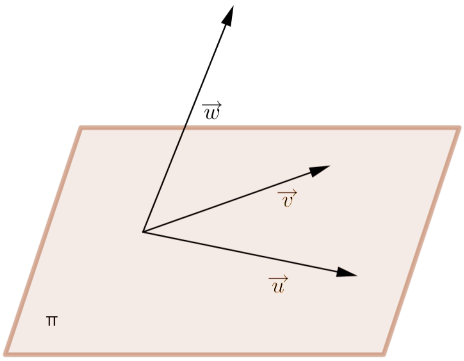
A independência linear está relacionada com direções distintas. No plano, por exemplo, dois vetores são linearmente independentes se não forem múltiplos um do outro.

Observe que os vetores abaixo $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$,no plano, não são paralelos, ou seja, não são múltiplos um do outro, portanto, são linearmente independentes. Em outras palavras a equação $\alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{v} = 0$ para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ linearmente independentes, admite apenas como solução $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$



Observe também que a partir de dois vetores L.I. quaisquer no plano podemos gerar o plano, gerar no sentido de podermos escrever qualquer vetor do plano como uma combinação linear de dois vetores que sejam L.I.

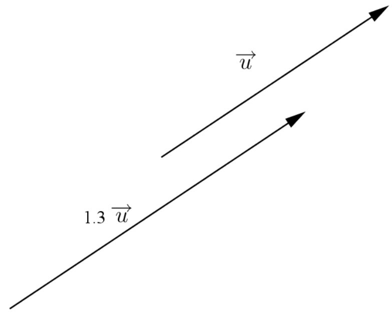
No espaço, três vetores quaisquer $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são linearmente independentes se possuírem direções independentes, ou seja, se não existir um plano que os contenha. Em outras palavras, existe um plano distinto para cada par de vetores L.I. escolhidos. No caso mostrado na figura abaixo existe um único plano π que contém os vetores $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$ e que é distinto dos outros planos formados por $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{w}$ e também por $\overrightarrow{v}$,$\overrightarrow{w}$.



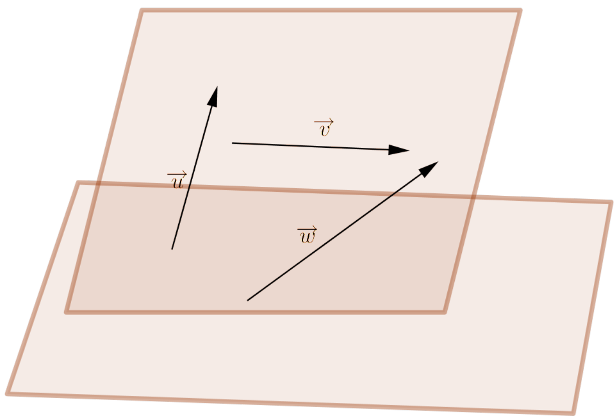
Semelhante ao plano podemos gerar o espaço,ou seja, escrever qualquer vetor do espaço como combinação linear bastando para isso tomar três vetores quaisquer que sejam linearmente independentes.

Dizemos que dois ou mais vetores são linearmente dependentes se pelo menos um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores.

No plano dois vetores são linearmente dependentes se eles são paralelos,pois, nesse caso um vetor é sempre combinação linear do outro,pois é múltiplo do outro.



No espaço três vetores são linearmente dependentes se existe um plano que os contem.



Proposição 1.3.1 *Da definição acima segue os seguintes fatos:*

I) $\overrightarrow{u}$ *é LD* $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

II) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *são LD* $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$

III) $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ *em* $\mathbb{R}^2$ *são LI* $\Longleftrightarrow$ *tem direções distintas.*

IV) $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}$ *são LD* $\Longleftrightarrow$ *um deles é combinação linear dos outros.*

V) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *são LD* $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ *ou* $\overrightarrow{w}$ *pertence ao plano determinado por* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$

VI) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *em* $\mathbb{R}^2$ *são LD.*

Demonstração

I) ($\Rightarrow$) *Se* $\overrightarrow{u}$ *é LD então* $\alpha\overrightarrow{u} = 0$ *para algum* $\alpha \neq 0$.

$\alpha\overrightarrow{u} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\alpha\overrightarrow{u} = \frac{1}{\alpha}0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = 0.$

($\Leftarrow$)*Se* $\overrightarrow{u} = 0$ *então* $\alpha\overrightarrow{u} = \alpha 0 \Rightarrow \alpha\overrightarrow{u} = 0$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Portanto* $\overrightarrow{u}$ *é LD.*

II) ($\Rightarrow$)*Se* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são LD então existem* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *não todos nulos, tais que* $\alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{v} = 0$. *Sem perda de generalidade, suponha que* $\alpha_1 \neq 0$. *Então* $\alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow \alpha_1\overrightarrow{u} = -\alpha_2\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{v}$*,ou seja, o vetor* $\overrightarrow{u}$ *é múltiplo do vetor* $\overrightarrow{v}$ *donde temos que* $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

($\Leftarrow$) *Se algum* $\overrightarrow{u}$ *ou* $\overrightarrow{v}$ *é o vetor nulo, digamos* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *então* $1 \cdot \overrightarrow{0} + 0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *qualquer que seja* $\overrightarrow{v}$. *Portanto* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são L.D. Se* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são vetores não nulos* $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ *então* $\exists\ \alpha \neq 0$ *tal que* $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v} = 0$ *onde* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são LD.*

III) ($\Rightarrow$)*Suponha que* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *tem mesma direção então o vetor* $\overrightarrow{u}$ *é múltiplo do vetor* $\overrightarrow{v}$, *logo,* $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow \exists\ 1 \in \mathbb{R}$ *tal que* $1\overrightarrow{u} - \alpha\overrightarrow{v} = 0$, *ABSURDO, pois, por hipótese,* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são LI. Portanto* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *tem direções distintas.*

($\Leftarrow$) *Suponha que* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são LD, então existem* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *não todos nulos, tais que* $\alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *admite solução não trivial. Sem perda de generalidade, suponha* $\alpha_1 \neq 0$, *então* $\alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1\overrightarrow{u} = -\alpha_2\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$. *ABSURDO, pois, por hipótese,* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *tem direções distintas.*

IV) ($\Rightarrow$)*Se* $\overrightarrow{u_1}$,$\overrightarrow{u_2}$,...,$\overrightarrow{u_n}$ *são LD então* $\exists\ \alpha_i \neq 0$ *com* $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$. *Sem perda de generalidade tomemos* $\alpha_1 \neq 0$ *então temos* $\alpha_1\overrightarrow{u_1} = -\alpha_2\overrightarrow{u_2} - ... - \alpha_n\overrightarrow{u_n} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{u_2} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overrightarrow{u_n}$. *Portanto,* $\overrightarrow{u_1}$ *é combinação linear de* $\overrightarrow{u_2}$,...$\overrightarrow{u_n}$.

($\Leftarrow$) *Sem perda de generalidade tomemos* $\overrightarrow{u_1}$ *como combinação linear dos outros vetores,ou seja,*$\overrightarrow{u_1} = \alpha_2\overrightarrow{u_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{u_n}$ *com* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *e* $\overrightarrow{u_1} - \alpha_2\overrightarrow{u_2} - ... - \alpha_n\overrightarrow{u_n} = 0 \Rightarrow \exists 1 \in \mathbb{R}$ *tal que a igualdade seja satisfeita. Portanto os vetores são LD.*

V) ($\Rightarrow$)*Façamos a contrapositiva. Se* $\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$ *então* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *determinam um plano. Se*

$\overrightarrow{w}$ não pertence ao plano determinado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$,então $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LI.

($\Leftarrow$) *Mostremos caso a caso. Se $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não pertence ao plano determinado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ então $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{w}$. Portanto $\overrightarrow{u}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Logo, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são L.D.*
Se $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ pertence ao plano determinado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ então $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} = \alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{v}$. Portanto $\overrightarrow{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Logo, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são L.D.
Se $\overrightarrow{u} \nparallel \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ pertence ao plano determinado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ então $\overrightarrow{w} = \alpha_1\overrightarrow{u} + \alpha_2\overrightarrow{v}$, ou seja, $\overrightarrow{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Logo, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são L.D. Em todos os casos temos que os vetores são LD.

VI) Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do $\mathbb{R}^2$, se eles são paralelos então qualquer um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros dois. Portanto são LD.
Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são paralelos então $\overrightarrow{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Portanto são LD.
Analogamente, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ não são paralelos então $\overrightarrow{v}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ e se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ não são paralelos então $\overrightarrow{u}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.Portanto são LD. Concluimos que, em todos os casos, $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são LD.

$\square$

1.3.3 Base

Definição 1.3.3 Seja $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ uma tripla de vetores dizemos que eles formam uma *base* do $\mathbb{R}^3$ se:

i) β é um conjunto LI

ii) β gera o $\mathbb{R}^3$

Exemplo 1.3.2 *Verifique se o conjunto* $\beta = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ *dos vetores* $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ *e* $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ *formam uma base do* $\mathbb{R}^3$.

Solução *Para resolver esta questão devemos verificar i) e ii)*

i) $\alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j} + \alpha_3 \overrightarrow{k} = 0$

$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = 0$

$\Rightarrow (\alpha_1,0,0) + (0,\alpha_2,0) + (0,0,\alpha_3) = 0$

$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

ii) $\alpha_1 \overrightarrow{i} + \alpha_2 \overrightarrow{j} + \alpha_3 \overrightarrow{k} = (x,y,z)$

$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (x,y,z)$

$\Rightarrow (\alpha_1,0,0) + (0,\alpha_2,0) + (0,0,\alpha_3) = (x,y,z)$

$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (x,y,z).$

Portanto β é uma base.$\square$

Observação 1.3.3 *Os vetores de* β *forma a chamada* ***base canônica*** *do* $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 2

Produtos alternados em $\mathbb{R}^3$

Definição 2.0.1 Seja r $\in \mathbb{Z}$ e $r \geq 1$. Um produto alternado de ordem r em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação:

$$\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3}_{r\ \ vezes} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que:

i) $\varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \lambda\overrightarrow{v_i}, ..., \overrightarrow{v_r}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_i}, ..., \overrightarrow{v_r})$

ii) $\varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{v_i}, ..., \overrightarrow{v_r}) = \varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{u_i}, ..., \overrightarrow{v_r}) + \varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_i}, ..., \overrightarrow{v_r})$ *para cada* $1 \leq i \leq r$.

iii) $\varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_i}, ...\overrightarrow{v_r}) = 0$ *se existir* j *com* $1 \leq j \leq r - 1$ *e* $\overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{v_{j+1}}$.

Observação 2.0.1 *Uma aplicação satisfazendo i) e ii) é dita multilinear.*

Proposição 2.0.1 *Se duas entradas consecutivas são permutadas então o produto alternado muda o sinal, ou seja,* $\varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_j}, \overrightarrow{v_{j+1}}, ..., \overrightarrow{v_r}) = -\varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_{j+1}}, \overrightarrow{v_j}, ..., \overrightarrow{v_r})$.

Demonstração Sabemos da definição de produto alternado que:

$$\varphi(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{v_{j+1}}, \overrightarrow{v_j} + \overrightarrow{v_{j+1}}, ..., \overrightarrow{v_r}) = 0.$$

Usando a multilinearidade de φ temos:

$$\underbrace{\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_j},\overrightarrow{v_j}+\overrightarrow{v_{j+1}},...,\overrightarrow{v_r})}_{(*)}+\underbrace{\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_{j+1}},\overrightarrow{v_j}+\overrightarrow{v_{j+1}},...,\overrightarrow{v_r})}_{(**)}=0.$$

Aplicando $ii)$ em $(*)$ e em $(**)$ temos:

$$(*)=\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_j},\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r})+\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_j},\overrightarrow{v_{j+1}},...,\overrightarrow{v_r})$$

e

$$(**)=\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_{j+1}},\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r})+\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_{j+1}},\overrightarrow{v_{j+1}},...,\overrightarrow{v_r}).$$

Pela condição $iii)$ sabemos que:

$$\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_j},\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r})=0$$

e

$$\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_{j+1}},\overrightarrow{v_{j+1}},...,\overrightarrow{v_r})=0.$$

Portanto:

$$0=(*)+(**)=\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_j},\overrightarrow{v_{j+1}},...,\overrightarrow{v_r})+\varphi(\overrightarrow{v_1},...\overrightarrow{v_{j+1}},\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r})=0.$$

Concluímos que:

$$\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_j},\overrightarrow{v_{j+1}},...,\overrightarrow{v_r})=-\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_{j+1}},\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r}).$$

□

Proposição 2.0.2 *Se duas entradas quaisquer coincidem, então o produto alternado é nulo. Mais precisamente:* $\varphi(\overrightarrow{v_1},..,\overrightarrow{v_i},...,\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r})=0$ *se* $\overrightarrow{v_i}=\overrightarrow{v_j}$ *para quaisquer* i *e* j *com* $i\neq j$.

Demonstração Seja $(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_i},...,\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r})$ uma r-upla de vetores com $\overrightarrow{v_i}=\overrightarrow{v_j}$ para $i\neq j$. Então aplicando a ***Proposição 2.0.1*** em vetores adjacentes do vetor $\overrightarrow{v_j}$ até o vetor $\overrightarrow{v_i}$ a uma quantidade mínima de $(j-i-1)$ vezes temos:

$\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_i},...,\overrightarrow{v_{j-1}},\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r}) = -\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_i},...,\overrightarrow{v_j},\overrightarrow{v_{j-1}},...,\overrightarrow{v_r}) = ... =$
$= (-1)^{j-i-1}\varphi(\overrightarrow{v_1},...,\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_j},...,\overrightarrow{v_r}) = 0$ pois $\overrightarrow{v_i}=\overrightarrow{v_j}$.

□

2.1 Produtos alternados de ordem 2

Dada uma base $\beta=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$ sabemos que para todo vetor $\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^3$ existem únicos escalares λ_1,λ_2,λ_3 tais que:

$$\overrightarrow{v}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}+\lambda_3\overrightarrow{v_3}$$

Sejam $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ dois vetores quaisquer gerados por β é possível determinar $\varphi(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2})$ por meio de suas coordenadas. De fato, se

$$\overrightarrow{w_1}=a_{11}\overrightarrow{v_1}+a_{12}\overrightarrow{v_2}+a_{13}\overrightarrow{v_3}$$

$$\overrightarrow{w_2}=a_{21}\overrightarrow{v_1}+a_{22}\overrightarrow{v_2}+a_{23}\overrightarrow{v_3}$$

$\varphi(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}) = \varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}+a_{12}\overrightarrow{v_2}+a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{21}\overrightarrow{v_1}+a_{22}\overrightarrow{v_2}+a_{23}\overrightarrow{v_3}) = \varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{21}\overrightarrow{v_1}+a_{22}\overrightarrow{v_2}+a_{23}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{21}\overrightarrow{v_1}+a_{22}\overrightarrow{v_2}+a_{23}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_1\overrightarrow{v_1}, a_{21}\overrightarrow{v_1}+a_{22}\overrightarrow{v_2}+a_{23}\overrightarrow{v_3}) = \varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{21}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{22}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{23}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{21}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{22}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{23}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{21}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{22}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{23}\overrightarrow{v_3}) = a_{11}a_{21}\varphi(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1})+a_{11}a_{22}\varphi(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})+a_{11}a_{23}\varphi(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_3})+a_{12}a_{21}\varphi(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1})+a_{12}a_{22}\varphi(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2})+a_{12}a_{23}\varphi(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})+a_{13}a_{21}\varphi(\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_1})+a_{13}a_{22}\varphi(\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_2})+a_{13}a_{23}\varphi(\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_3}) = 0+a_{11}a_{22}\varphi(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})+a_{11}a_{23}\varphi(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_3})+a_{12}a_{21}\varphi(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1})+0+a_{12}a_{23}\varphi(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})+a_{13}a_{21}\varphi(\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_1})+a_{13}a_{22}\varphi(\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_2})+0 =$

$$= (a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})\varphi(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})+(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})\varphi(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_3})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\varphi(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})\textbf{(I)}$$

As informações acima nos diz como definir unicamente ou caracterizar produtos alternados de ordem 2 em $\mathbb{R}^3$. A saber o produto alternado

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

fica completamente definido pelas imagens $\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$,$\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$ e $\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ fixando-se a base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$. Dessa forma utilizando-se a base canônica $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ podemos definir o produto alternado tal que:

$$\varphi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i}$$

$$\varphi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = -\overrightarrow{j}$$

$$\varphi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{k}$$

Dessa forma temos que **(I)** fica definido como:

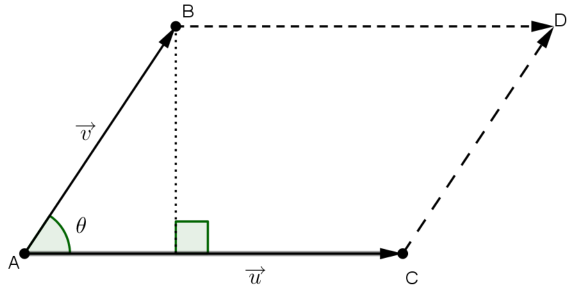
$$\varphi(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\overrightarrow{i} - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})\overrightarrow{j} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\overrightarrow{k}$$

que coincide com a definição de produto vetorial de vetores. Concluímos então que o produto vetorial é um caso particular de produto alternado.

2.1.1 Área em $\mathbb{R}^3$

Aqui usaremos a notação $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ para calcular o produto alternado de vetores em substituição a $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

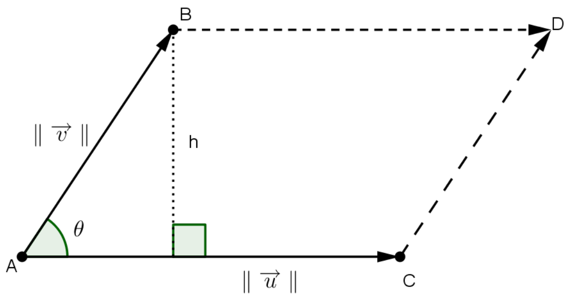
Proposição 2.1.1 *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores quaisquer linearmente independentes do $\mathbb{R}^3$ e seja θ o ângulo formado entre eles.*



*A área **A** do paralelogramo ABDC formado pelos vetores é dada por:*

$$A = \sqrt{\| \overrightarrow{u} \|^2 \| \overrightarrow{v} \|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2} \tag{2.1}$$

Demonstração Da geometria básica, sabemos que a área do paralelogramo é o produto da base pela altura.



No caso da figura acima temos que a área é dada por:

$$A = \| \overrightarrow{u} \| \cdot \| \overrightarrow{v} \| \sin\theta$$

Note que $A^2 = (\| \overrightarrow{u} \| \cdot \| \overrightarrow{v} \| \sin\theta)^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{v} \|^2 \sin^2\theta$, mas $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, donde temos que $A^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{v} \|^2 \, (1 - \cos^2\theta)$,ou seja,

$$A^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{v} \|^2 \cos^2\theta$$
$$A^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{v} \|^2 - (\| \overrightarrow{u} \| \cdot \| \overrightarrow{v} \| \cos\theta)^2$$
$$A^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{v} \|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 \; \square$$

Proposição 2.1.2 *Para quaisquer vetores do $\mathbb{R}^3$ com $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$*

tem-se:

$$\| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 \cdot \| \overrightarrow{v} \|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 \tag{2.2}$$

Demonstração $\| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \|^2 = (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 =$
$y_1^2z_2^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + y_2^2z_1^2 + x_1^2z_2^2 - 2x_1x_2z_1z_2 + x_2^2z_1^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 =$
$x_1^2(y_2^2 + z_2^2) + y_1^2(x_2^2 + z_2^2) + z_1^2(x_2^2 + y_2^2) - 2x_1x_2y_1y_2 - 2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) =$
$x_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + z_1^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - x_1^2x_2^2 - y_1^2y_2^2 - z_1^1z_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 -$
$2z_1z_2(x_1x_2 + y_1y_2) = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + 2z_1z_2(x_1x_2 +$
$y_1y_2) + z_1^2z_2^2) = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 \| \overrightarrow{v} \|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 \square$

Portanto, de (2.1) e (2.2) concluímos que $A = \| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \|$

2.2 Produtos alternados em $\mathbb{R}^3$ de ordem 3

Dada uma base $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$ sabemos que para todo vetor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ existem únicos escalares λ_1,λ_2,λ_3 tais que:

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \lambda_3 \overrightarrow{v_3}$$

.

Sejam $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$ e $\overrightarrow{w_3}$ três vetores quaisquer gerados por β é possível determinar $\varphi(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{v_3})$ por meio de suas coordenadas. De fato, se

$$\overrightarrow{w_1} = a_{11}\overrightarrow{v_1} + a_{12}\overrightarrow{v_2} + a_{13}\overrightarrow{v_3}$$

$$\overrightarrow{w_2} = a_{21}\overrightarrow{v_1} + a_{22}\overrightarrow{v_2} + a_{23}\overrightarrow{v_3}$$

$$\overrightarrow{w_1} = a_{31}\overrightarrow{v_1} + a_{32}\overrightarrow{v_2} + a_{33}\overrightarrow{v_3}$$

$\varphi(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) = \varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1} + a_{12}\overrightarrow{v_2} + a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{21}\overrightarrow{v_1} + a_{22}\overrightarrow{v_2} + a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{31}\overrightarrow{v_1} + a_{32}\overrightarrow{v_2} + a_{33}\overrightarrow{v_3}) =$

$\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{33}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+$
$\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{33}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+$
$\varphi(a_{11}\overrightarrow{v_1}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{33}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{33}\overrightarrow{v_3})+$
$\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{33}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+$
$\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{12}\overrightarrow{v_2}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{33}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+$
$\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{21}\overrightarrow{v_1}, a_{33}\overrightarrow{v_3})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{22}\overrightarrow{v_2}, a_{33}\overrightarrow{v_3})+$
$\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{31}\overrightarrow{v_1})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{32}\overrightarrow{v_2})+\varphi(a_{13}\overrightarrow{v_3}, a_{23}\overrightarrow{v_3}, a_{33}\overrightarrow{v_3}) = a_{11}a_{21}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1})+$
$a_{11}a_{21}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})+a_{11}a_{21}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})+a_{11}a_{22}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})+a_{11}a_{22}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2})+$
$a_{11}a_{22}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})+a_{11}a_{23}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1})+a_{11}a_{23}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2})+a_{11}a_{23}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3})+$
$a_{12}a_{21}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1})+a_{12}a_{21}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})+a_{12}a_{21}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})+a_{12}a_{22}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})+$
$a_{12}a_{22}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2})+a_{12}a_{22}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})+a_{12}a_{23}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1})+a_{12}a_{23}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2})+$
$a_{12}a_{23}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3})+a_{13}a_{21}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1})+a_{13}a_{21}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})+a_{13}a_{21}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})+$
$a_{13}a_{22}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})+a_{13}a_{22}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2})+a_{13}a_{22}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})+a_{13}a_{23}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1})+$
$a_{13}a_{23}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2})+a_{13}a_{23}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = 0+0+0+0+0+a_{11}a_{22}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})+0+$
$a_{11}a_{23}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2})+0+0+0+a_{12}a_{21}a_{33}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})+0+0+0+a_{11}a_{23}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1})+$
$0 + 0 + 0 + a_{13}a_{21}a_{32}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) + 0 + a_{13}a_{22}a_{31}\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 =$

$$a_{11}\cdot(a_{22}a_{23}-a_{23}a_{32})\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})+a_{12}\cdot(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})\varphi(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1})+a_{13}\cdot(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\varphi(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$$

$$= (a_{11} \cdot (a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32}) + a_{12} \cdot (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}))\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$$

$$= [\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}] \cdot \varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$$

As informações acima nos diz como definir unicamente ou caracterizar produtos alternados de ordem 3 em $\mathbb{R}^3$. A saber o produto alternado

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

fica completamente definido pela imagem $\varphi(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ fixando-se a base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$. Dessa forma utilizando-se a base canônica $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ podemos definir o produto alternado tal que:

$$\varphi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{v}, com \parallel \overrightarrow{v} \parallel = 1$$

Dessa forma temos que

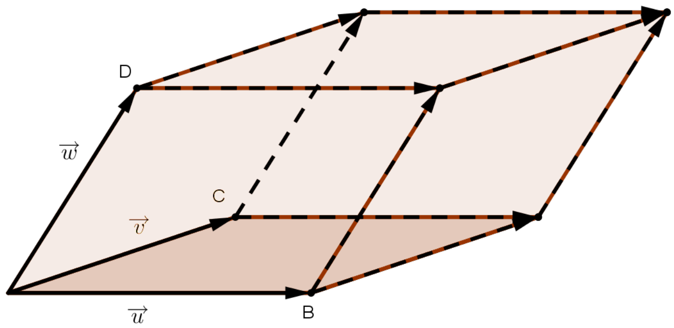
$$\varphi(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) = [\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}] \cdot \overrightarrow{v}$$

Considerando $\overrightarrow{v}$ um vetor unitário $\parallel \varphi(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}) \parallel$ coincide com a definição de produto misto em $\mathbb{R}^3$.

2.2.1 Volumes em $\mathbf{R}^3$

Aqui usaremos a notação $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ para calcular o produto alternado de vetores em substituição a $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

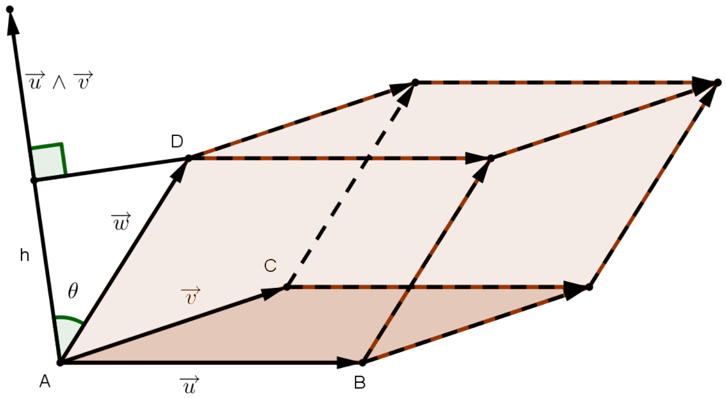
Proposição 2.2.1 *Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, três vetores L.I. do $\mathbb{R}^3$ conforme figura abaixo.*



O volume do paralelepípedo formado por esses vetores é dado por:

$$V = \parallel \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \parallel$$

Demonstração *Da geometria espacial, sabemos que o volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura h.*



Vimos na parte de área que a area da base é dada por $A = \| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \|$ *e como* $h = \| \overrightarrow{w} \| \cos\theta$ *temos que o seu volume é dado por:*

$$V = \| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \| \cdot \| \overrightarrow{w} \| \cos\theta$$

Mas sabemos que $\| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \| \cdot \| \overrightarrow{w} \| \cos\theta = | \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} |$ *pela* ***Proposição 1.2.5****. E como o volume tem sempre valor positivo, chegamos a conclusão que:* $V = | \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} |$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. 3ª. ed. rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[2] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] WINTERLE, Paulo. Vetores e Geometria Analítica. 2ª. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

[4] LANG, Serge. Algebra Linear. 1ª. ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Edgard Blucher, 1977.